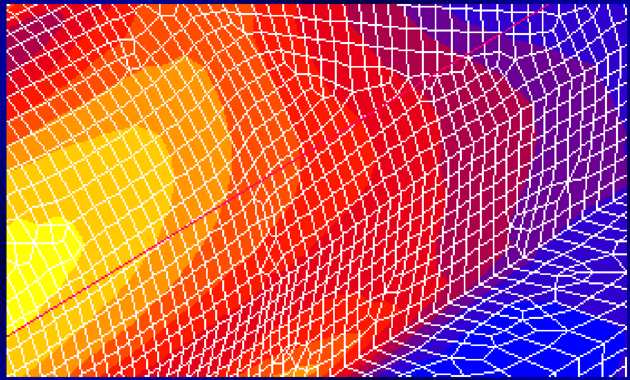
MKP / FEM

MKP: Metoda konečných prvků
FEM: Finite Element Method



Matematická numerická metoda

Simulace deformací, napětí, vlastních frekvencí, …
na sestaveném virtuálním fyzikálním modelu

Využití výpočetní techniky
Snižování nákladů na testování prototypů výrobků

Virtuální fyzikální model

Definice (Preprosessing):
Objekt: geometrie, vlastnosti hmoty
Podmínky: které na objekt působí, definují stav

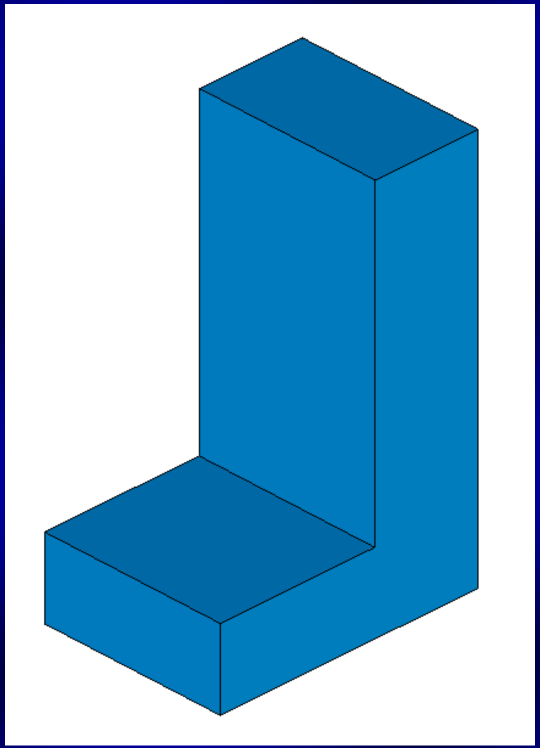
Výpočet (Processing): výpočet neznámých v úloze

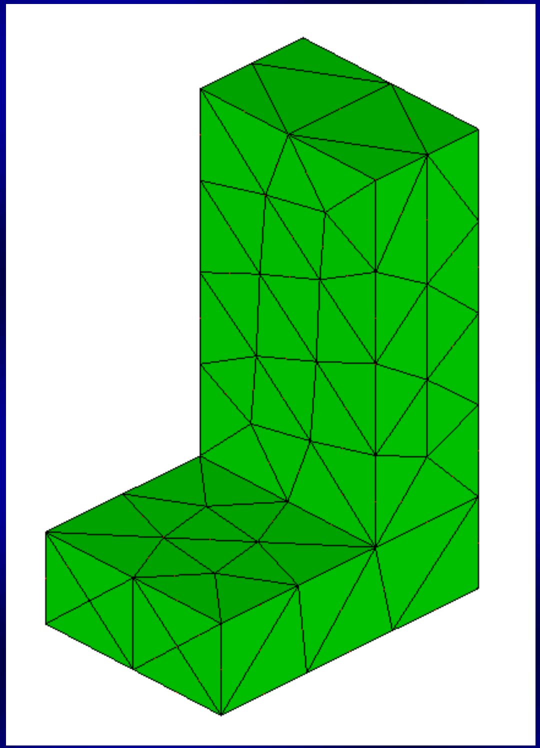
Vyhodnocení (Postprocessing): relevance výsledků

Simulace geometrie hmoty

Nahrazení (diskretizace):

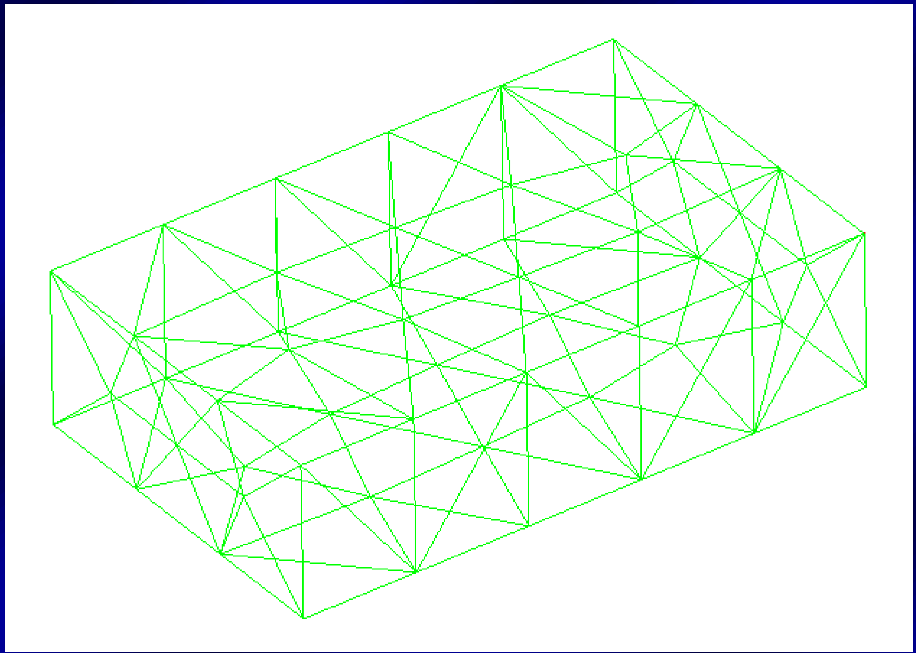
geometrický tvar >> síť obsahující konečný počet prvků

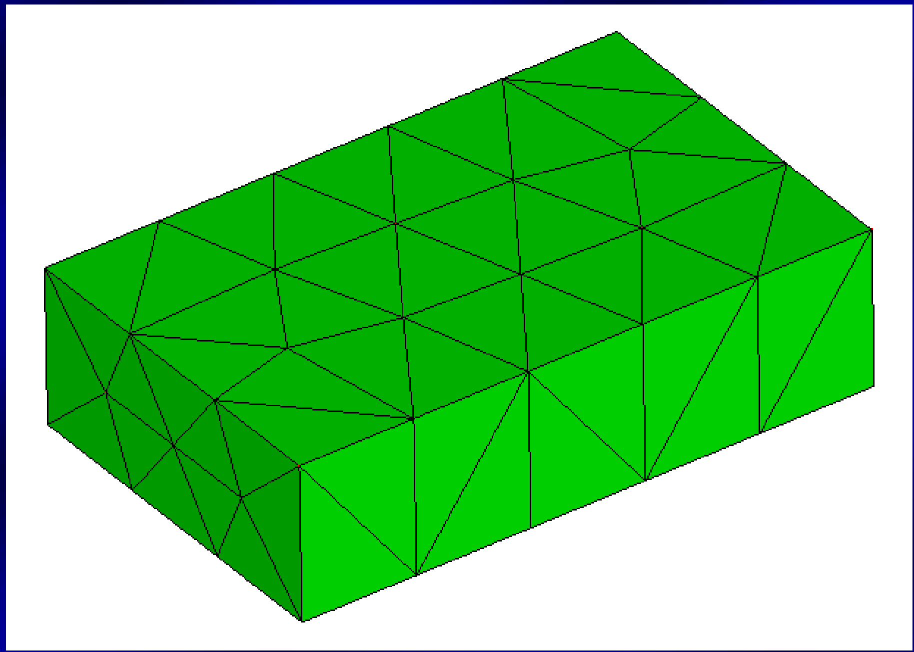




Simulace geometrie hmoty

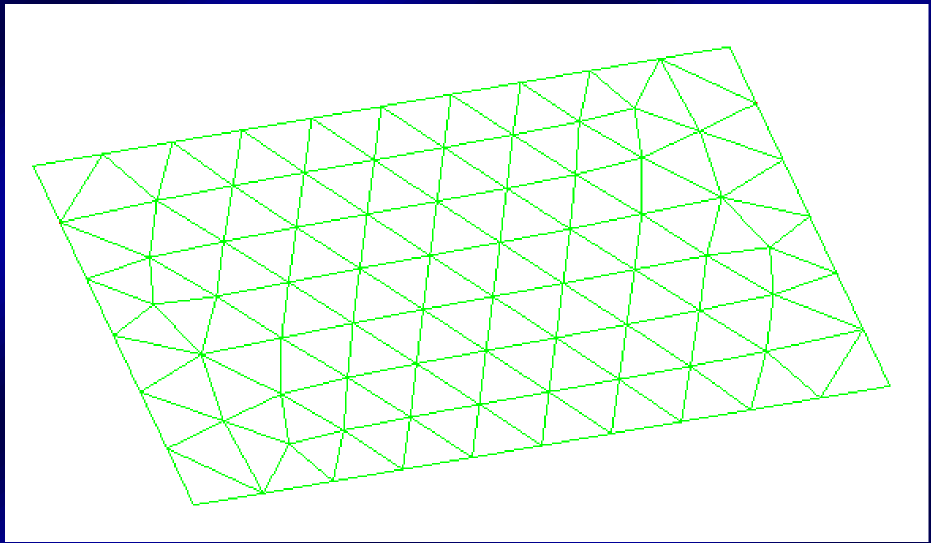
3D OBJEMOVÁ SÍŤ | SOLID MESH

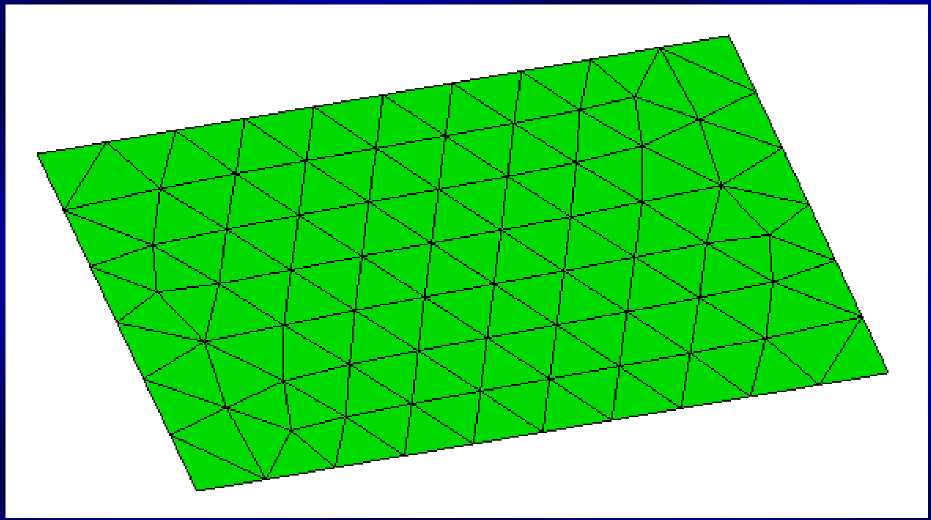




Simulace geometrie hmoty

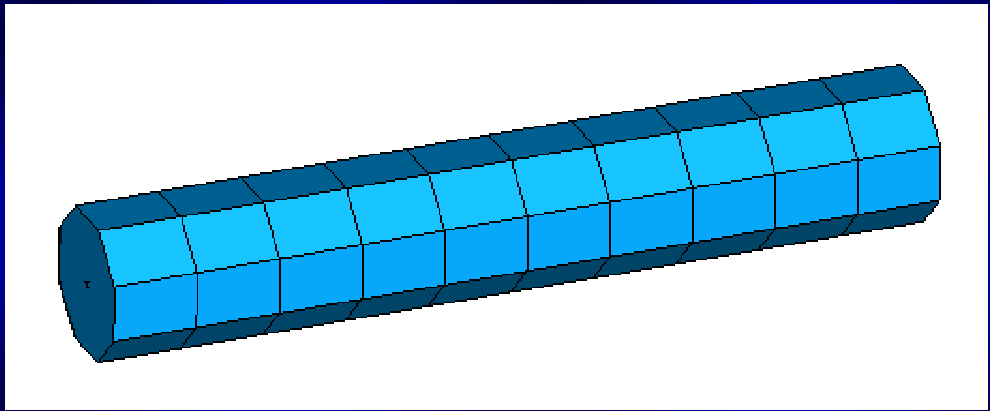
2D PLOŠNÁ SÍŤ | SHELL MESH

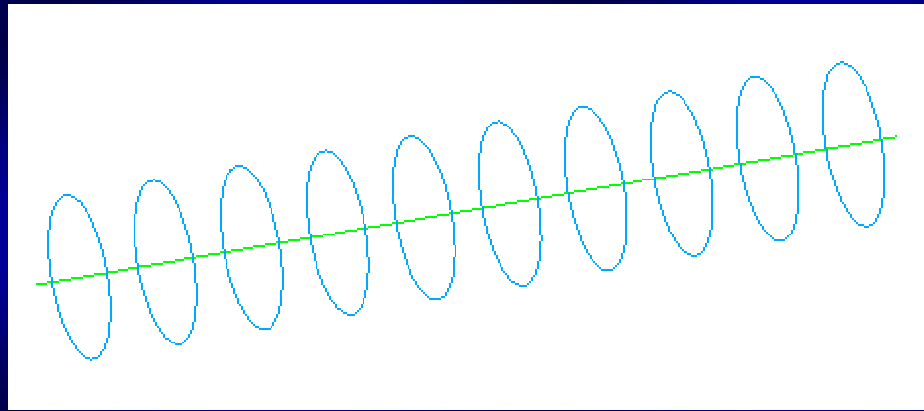




Simulace geometrie hmoty

1D SÍŤ Z PRUTOVÝCH PRVKŮ | BEAM MESH



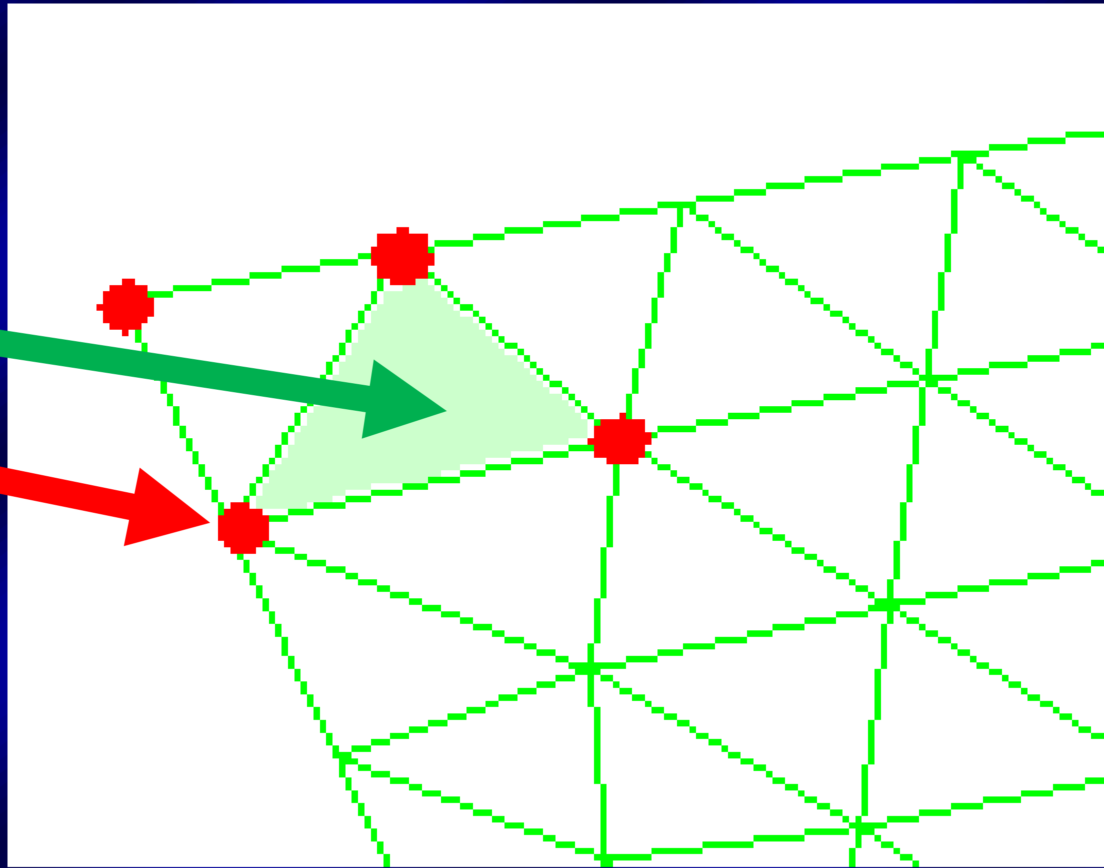


Simulace geometrie hmoty

Objekty sítě

Prvek / Element

Uzel / Node

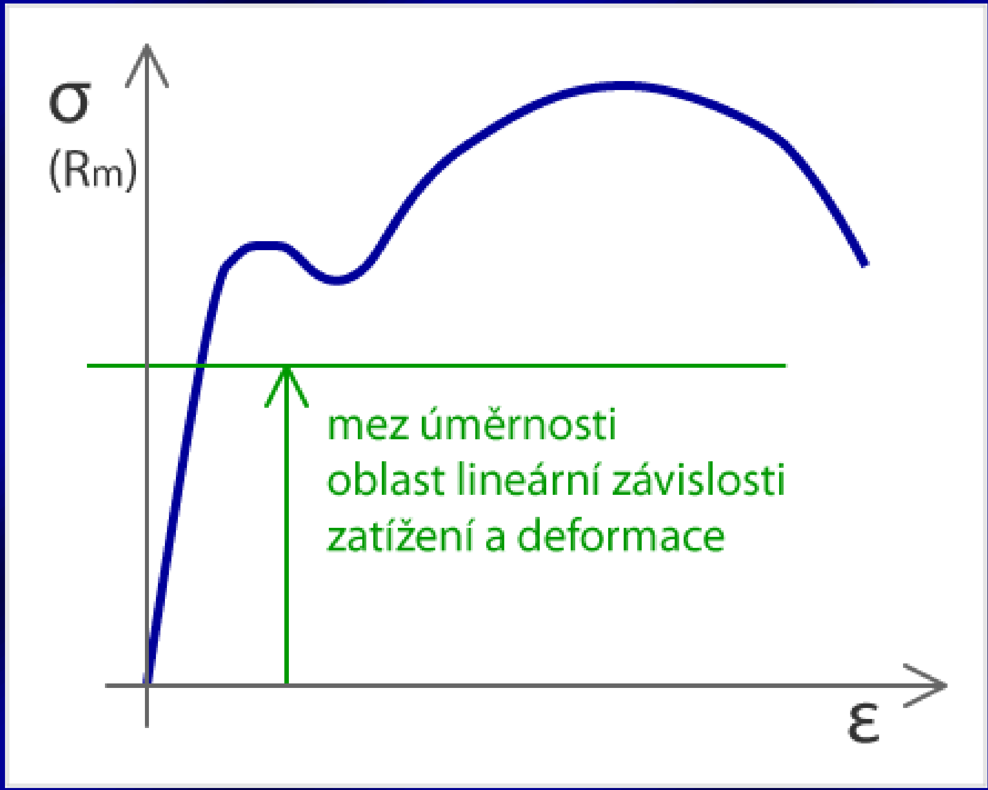


Definice fyzikálních vlastností hmoty

Zjednodušení:

lineární závislost
napětí a deformace
E, modul pružnosti
lineární úloha

homogenní
isotropní



Definice fyzikálních vlastností hmoty

Nejjednodušší materiál:

materiálová linearita, lineární úloha

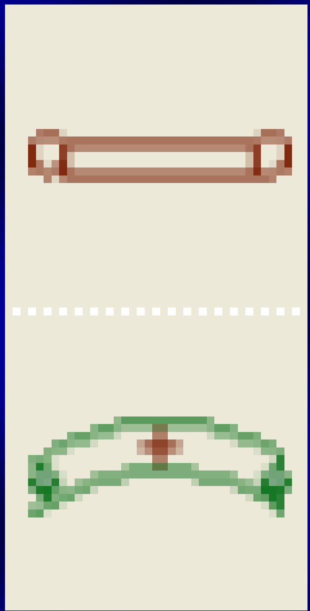
- modul pružnosti
- měrná hmotnost, hustota
- poissonovo číslo
- modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

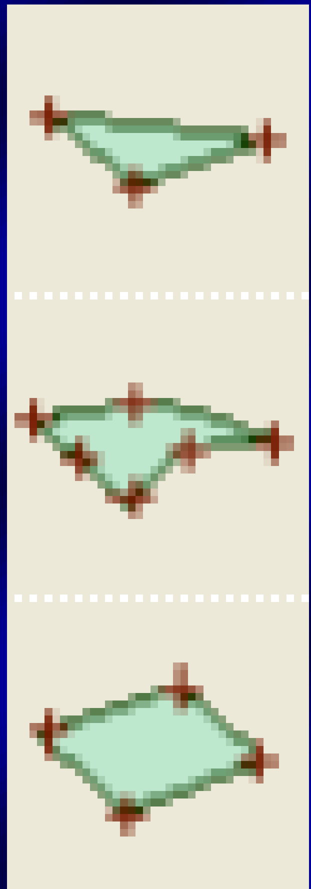
isotropní, homogenní

Definice typu prvků sítě v SW systému (I-DEAS)

1D, BEAM



2D, SHELL



3D, SOLID

Definice fyzikálních vlastností materiálu v SW systému (I-DEAS)

lineární materiál, homogenní, isotropní

Properties (Required)				
MODULUS OF ELASTICITY	1*	Const	206800	NEWTON/MILLIMETER^2
POISSONS RATIO	1*	Const	0.29	UNITLESS
SHEAR MODULUS	1*	Const	80155	NEWTON/MILLIMETER^2
Properties (Optional)				
MASS DENSITY	1*	Const	7.82e-009	TONNE/MILLIMETER^3
COEFFICIENT OF THERMAL EXP.	1*	Const	1.17e-005	1/CELSIUS
THERMAL EXPANSION REFERENC	1*	Const	21.85	C
Characteristics				
Attributes...				
Classes...				
Components...				

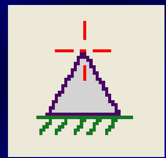
Podmínky definující stav objektu

OKRAJOVÉ PODMÍNKY | Boundary Condition

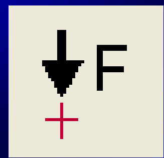
simulace stavu reálného provozu objektu

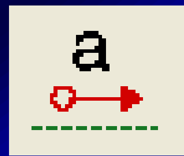
např.:

Podpora / Restraint



Zatížení / Load Set





Teplota / Temperature

Vazby / Constraint

Základní MKP rovnice lineární statické úlohy

$$[K]\{\Delta_G\}=\{F\}$$

[K] … matice tuhosti

{Δ} … vektor deformačních parametrů

{F} … vektor vnějšího zatížení

Základní MKP rovnice lineární statické úlohy

rozepsaný maticový a vektorový tvar

$$[K]\{\Delta_G\} = \{F\}$$

$$\Delta_1 k_{11} + \Delta_2 k_{12} + \Delta_3 k_{13} + \dots\dots\dots\dots + \Delta_n k_{1n} = f_1$$

$$\Delta_1 k_{21} + \Delta_2 k_{22} + \Delta_3 k_{23} + \dots\dots\dots\dots + \Delta_n k_{2n} = f_2$$

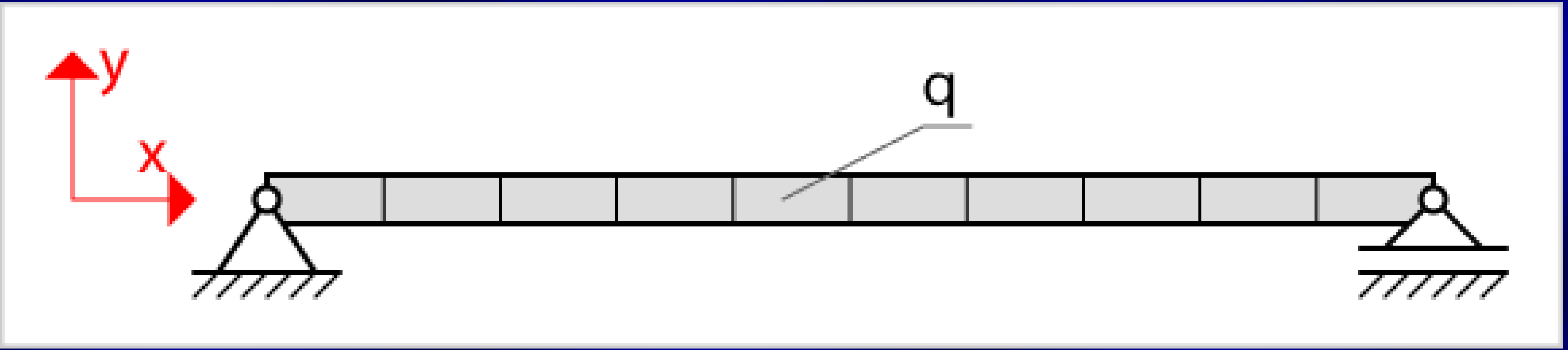
$$\dots\,.$$

$$\Delta_1 k_{n1} + \Delta_2 k_{n2} + \Delta_3 k_{n3} + \dots\dots\dots\dots + \Delta_n k_{nn} = f_n$$

Základní MKP rovnice lineární statické úlohy

Odvození na příkladu řešení 2D MKP úlohy:

nosník se spojitým zatíženým **„q“**



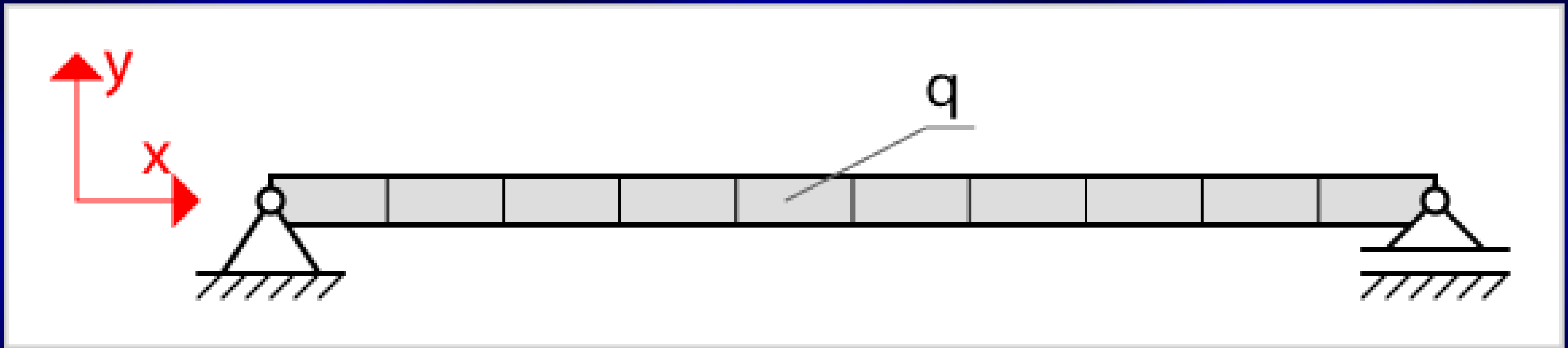
Matematická teorie dovoluje řešit úlohy **nD.**

1D, 2D, <u>3D</u>, 4D ..... nD

Základní MKP rovnice lineární statické úlohy

Vstupní známé hodnoty:
- geometrický tvar
- materiálové vlastnosti
- vnější zatížení
- některé deformační parametry (definují podpory)

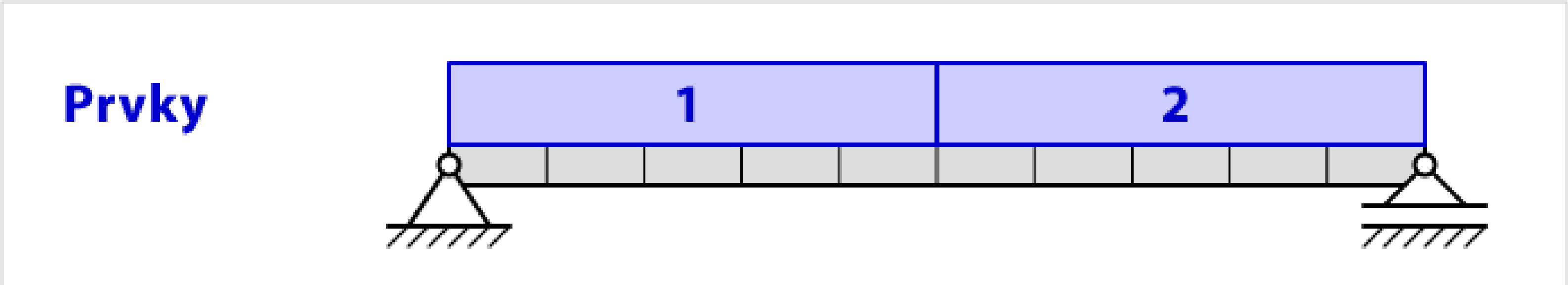
Hledané neznámé:
- průhybová křivka



Odvození MKP rovnice lineární statické úlohy

Rozdělení nosníku se spojitým zatížením na:

2 prvky shodné délky, diskretizace, princip MKP



1 prvek nosníku a jeho deformační parametry

pro x=0

Δ1 posun

Δ2 otočení

----

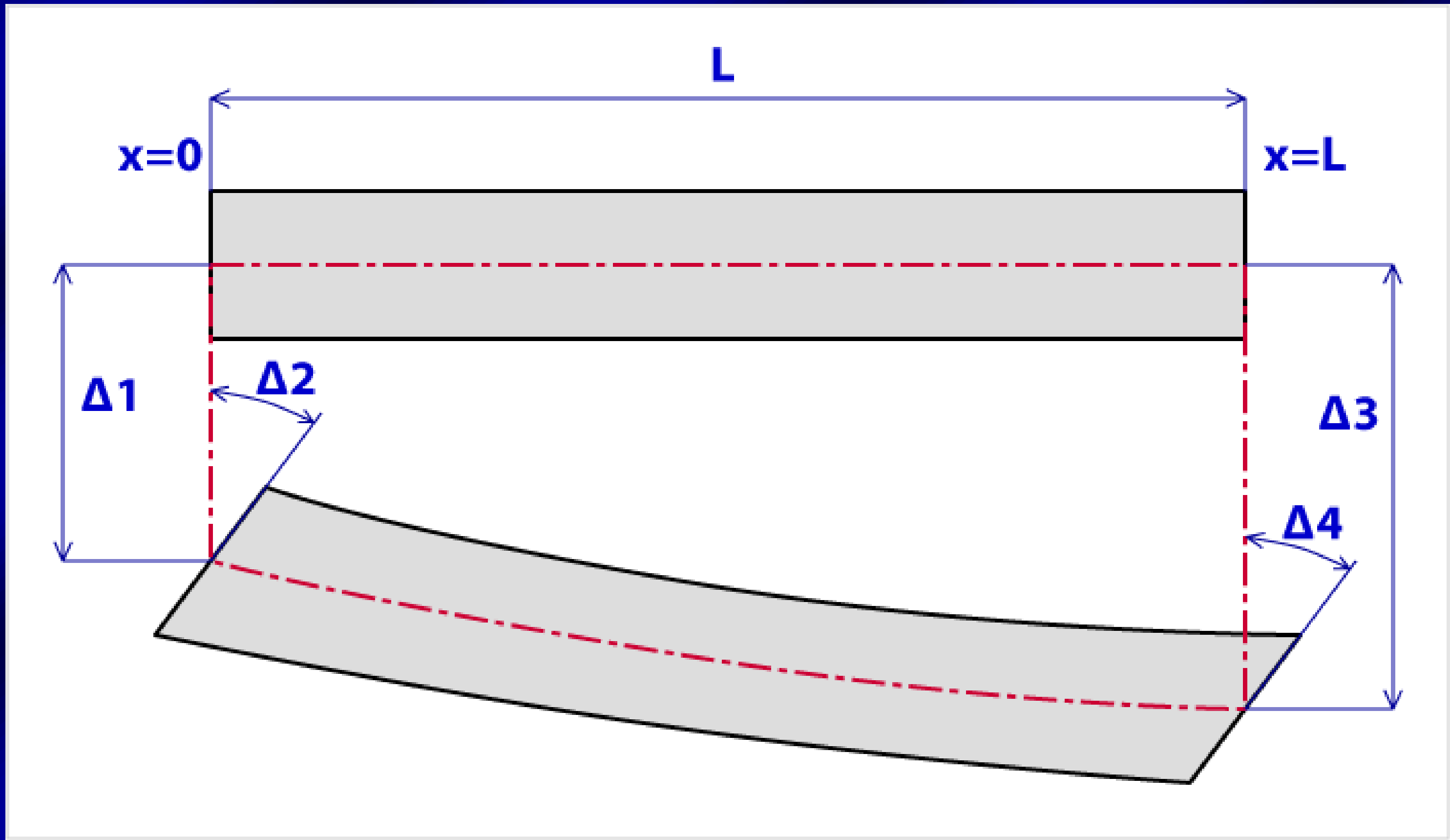
pro x=L

Δ3 posun

Δ4 otočení

2D úloha:

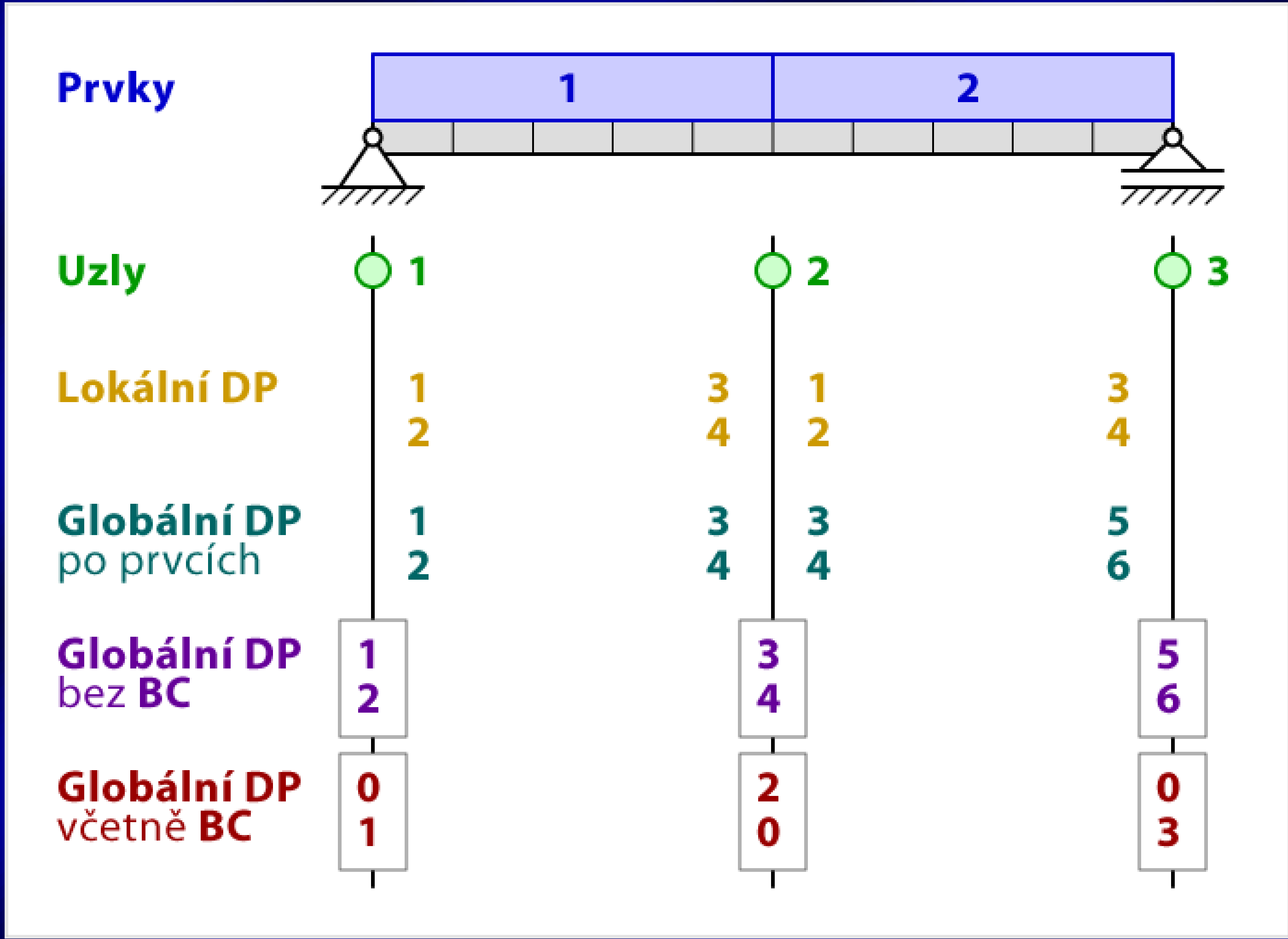
4 def. par.



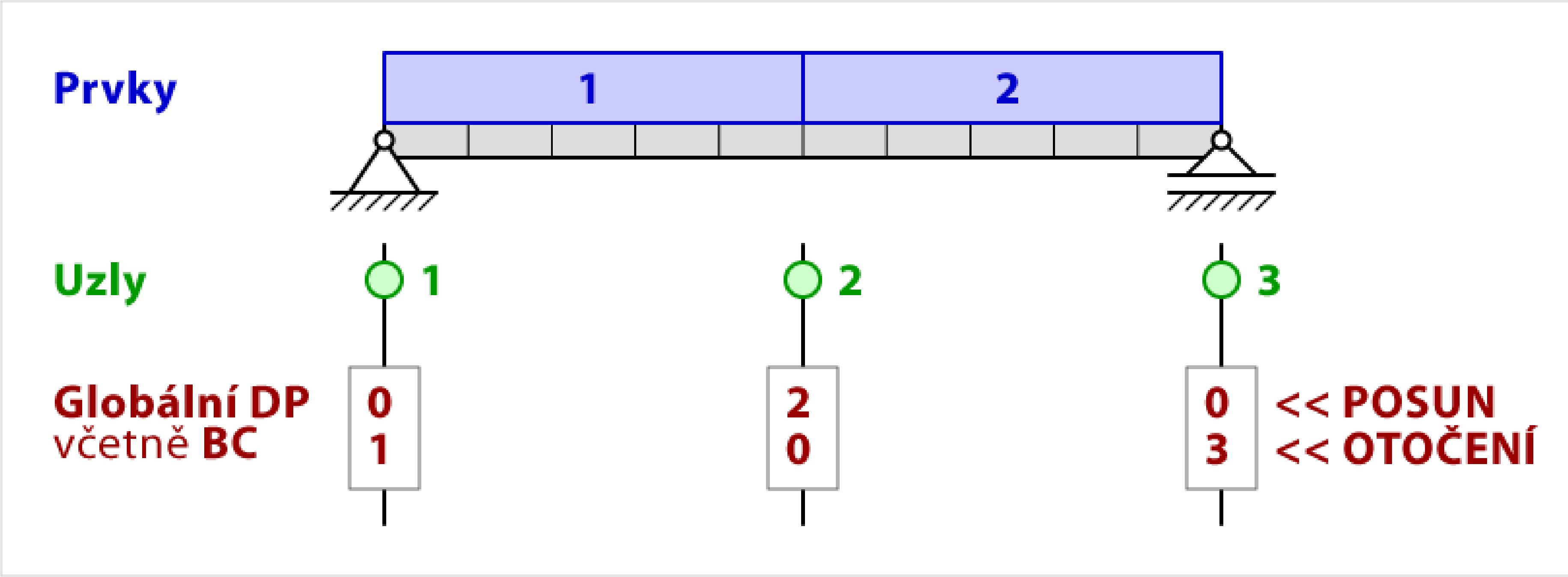
Deformační parametry a Okrajové podmínky

DP
Deformation
Parameters
- posun
- otočení

BC
Boundary
Condition
okrajové
podmínky



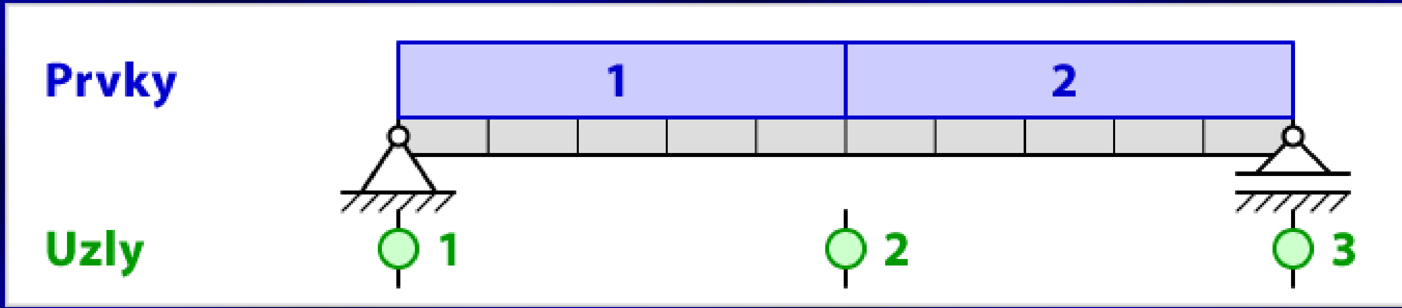
Deformační parametry v uzlech s uvážením známých okrajových podmínek



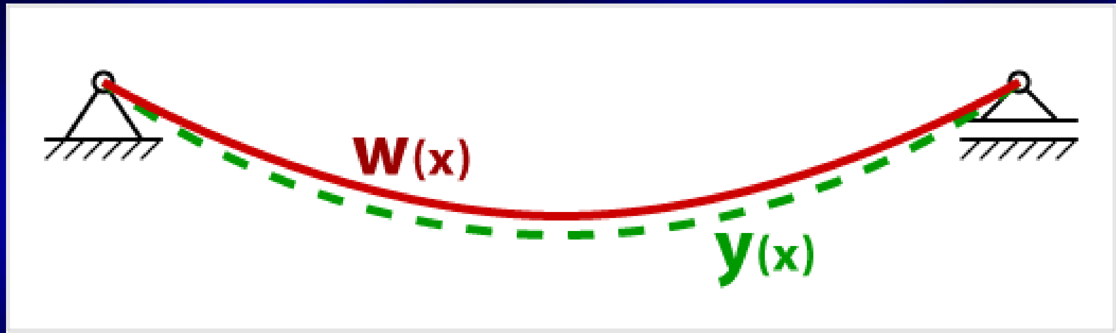
Zjišťování hodnot DP na celém průběhu délky

Nejen v uzlech ale také mezi uzly.

Interpolace



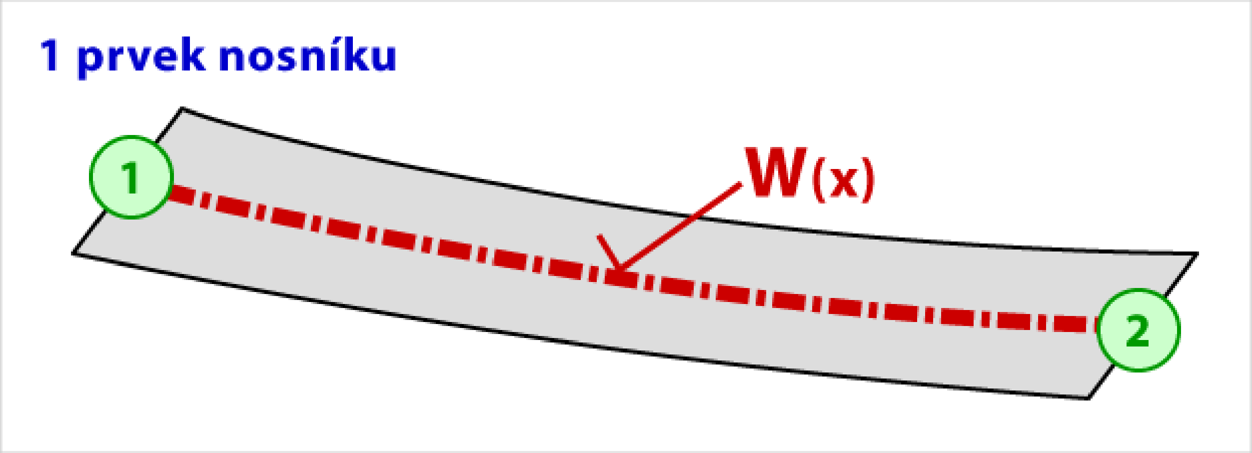
Definice průhybové křivky

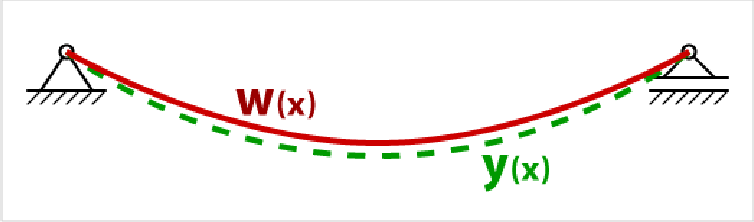


Nahrazení deformační křivky polynomem

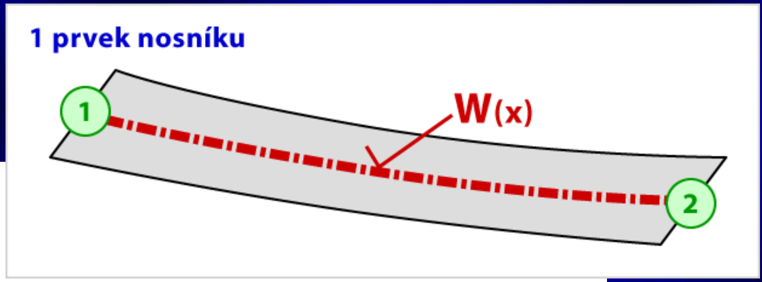
polynom n-tého řádu definice průběhu 1 prvku

$$w_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . a_n x^n$$





Zápis deformační křivky do vektorového tvaru



a0, a1, a2, a3 - neznámé konstanty

$$w_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$w_{(x)} = \{a_0 + a_1 + a_2 + a_3\}\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \{a\}^T\{x\} = \{x\}^T\{a\}$$

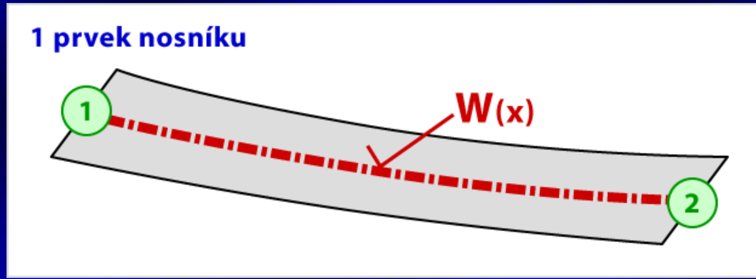
Nahrazení délky prvku 0-L na rozsah 0-1

použití proměnné (0-1): $\xi = \frac{x}{L},\ d\xi = \frac{dx}{L}$

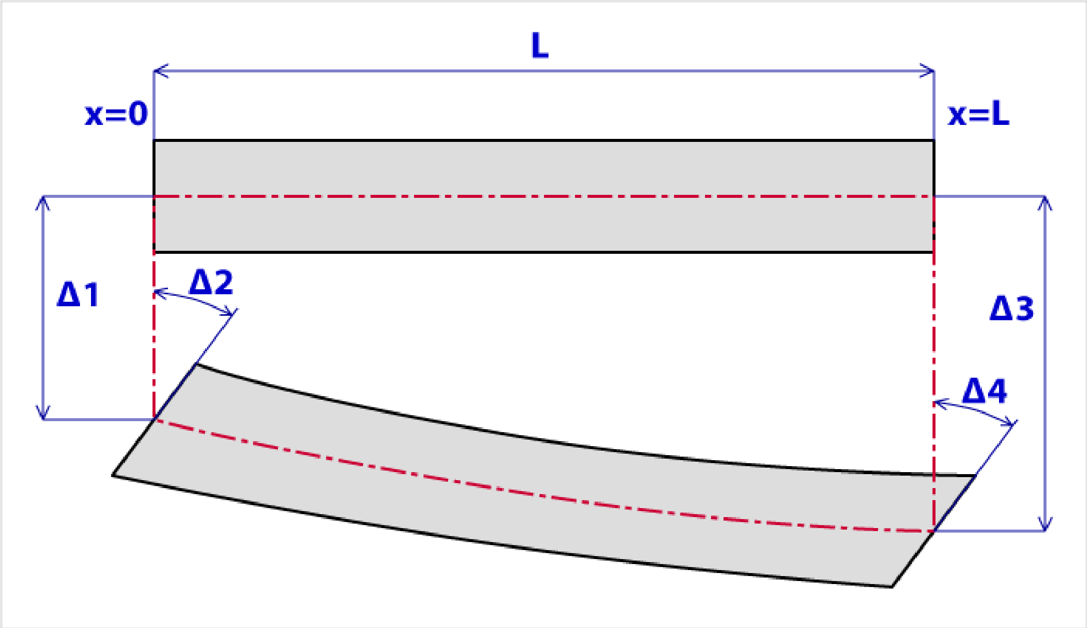
$$w_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$w_{(\xi)} = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3$$

L: 0-1



Deformační parametry podle funkce $w_{(x)}$



$$\Delta_1 = w_{(\xi=0)}$$ posun

$$\Delta_2 = \frac{dw}{d\xi}_{(\xi=0)}$$ otočení

$$\Delta_3 = w_{(\xi=1)}$$ posun

$$\Delta_4 = \frac{dw}{d\xi}_{(\xi=1)}$$ otočení

1 prvek

Zpětné dosazení deformačních parametrů dle $w_{(x)}$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \{\Delta\}$$ dosazení >> $$w_{(\xi)} = \{b_0 + b_1 + b_2 + b_4\} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{Bmatrix} = \{b\}^T \{\xi\} = \{\xi\}^T \{b\}$$

$$\Delta_1 = w_{(\xi=0)}$$ **posun**

$$\Delta_2 = \frac{dw}{d\xi}_{(\xi=0)}$$ **otočení**

$$\Delta_3 = w_{(\xi=1)}$$ **posun**

$$\Delta_4 = \frac{dw}{d\xi}_{(\xi=1)}$$ **otočení**

$$w_{(\xi)} = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3$$

$$\frac{dw}{d\xi} = b_1 + 2b_2\xi + 3b_4\xi^2$$

Funkce tvaru, vektorový tvar

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \{\Delta\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{2}{L} & \frac{3}{L} \end{bmatrix} \{b\} = [S]\{b\}$$

vektor neznámých $\{b\}$

$$w_{(\xi)} = \{\xi\}^T [S]^{-1} \{\Delta\} = \{\Delta\}^T . \{N\} = \{N\}^T . \{\Delta\}$$

$\{N\}$ ... **funkce tvaru** (shape function)

$w_{(\xi)}$ ... průhybová křivka

$\{\Delta\}$ ... vektor deformačních parametrů DP

Funkce tvaru

- jednoznačně dána pro daný aproximační polynom
- závislá pouze na délkové souřadnici

Deformace se určí pomocí:

- funkce tvaru
- známých hodnot deformačních parametrů

$$w_{(\xi)} = \{\Delta\}^T . \{N\} = \{N\}^T . \{\Delta\}$$

$$\{N\}^T = \{\xi\}^T . [S]^{-1} = \left\{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, L\left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right), 3\xi^2 - 2\xi^3, L\left(-\xi^2 + \xi^3\right)\right\}$$

Vstupy pro odvození MKP rovnice, lineární statika

Funkce tvaru $w_{(\xi)} = \{\Delta\}^T . \{N\} = \{N\}^T . \{\Delta\}$

Princip varianty minima celkové energie při deformaci

Potencionální energie **vnitřních sil**

Potencionální energie **vnějších sil**

Potencionální energie vnitřních sil, Πd

matice tuhosti [k], pro jediný prvek

pružnost pevnost: $\Pi_d = \frac{\sigma}{2.E} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_{o(x)}^2}{EJ}dx\,,$ pro malé průhyby: $y''_{(x)} = -\frac{M_{o(x)}}{EJ}$

$$\Pi_d = \frac{1}{2}EJ\int_0^L \left(y''_{(x)}\right)^2 dx\,,$$

$y''_{(x)} \approx w''_{(\xi)}$ … dosazení funkce průhybové křivky

$w_{(\xi)} = \{\Delta\}^T.\{N\} = \{N\}^T.\{\Delta\}$ … dosazení f. tvaru

[k] matice tuhosti prvku

$$\Pi_d = \frac{1}{2}\{\Delta\}^T[k]\{\Delta\}$$

Matice tuhosti [k] pro jediný prvek

z rovnice potencionální energie vnitřních sil, Πd

$$\Pi_d = \frac{1}{2}\{\Delta\}^T [k] \{\Delta\}$$

[k] matice tuhosti prvku

závislá na: EJ, L, {N}

EJ … ohybová tuhost

$$[k] = \frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix} 12, & 6L, & -12, & 6L \\ & 4L^2 & -6L, & 2L^2 \\ & & 12, & -6L \\ sym. & & & 4L^2 \end{bmatrix}.$$

Potencionální energie vnějších sil, Πz

Vektor zatížení {f}

$$\Pi_z = -\int_0^L w_{(x)} q_{(x)} dx = -\int_0^1 w_{(\xi)} q_{(\xi)} L d\xi = -L \int_0^1 q_{(\xi)} \{N\}^T d\xi . \{\Delta\}$$

použití proměnné (0-1): $d\xi = \dfrac{dx}{L}$

$w_{(\xi)} = \{N\}^T . \{\Delta\}$ … funkce tvaru

vektor spojitého zatížení prvku u ohybu:

$$\{f\}^T = -L \int_0^1 q_{(\xi)} \{N\}^T . d\xi$$

$$\Pi_z = -\{f\}^T \{\Delta\}$$

Celková potencionální energie

pro 1 prvek a pro soustavu prvků

1 prvek:

$$\Pi_p = \Pi_d + \Pi_z = \frac{1}{2}\{\Delta\}^T[k]\{\Delta\} - \{f\}^T\{\Delta\}$$

soustava prvků:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n}\Pi_{pi} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{\Delta_i\}^T[k_i]\{\Delta_i\} - \sum_{i=1}^{n}\{f_i\}^T\{\Delta_i\}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\{\Delta_G\}^T[K]\{\Delta_G\} - \{F\}^T\{\Delta_G\}$$

[K] matice tuhosti soustavy

{F} celkový zatěžovací vektor

Varianta deformace pro minimální celkovou potencionální energii

Podmínka nulovosti: variace funkcionálu energie.

$$\Pi = \frac{1}{2}\{\Delta_G\}^T [K]\{\Delta_G\} - \{F\}^T \{\Delta_G\}$$

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \{\Delta_G\}} = 0 = [K]\{\Delta_G\} - \{F\}$$

Výsledná MKP rovnice >>

$$\boxed{[K]\{\Delta_G\} = \{F\}}$$

Základní MKP rovnice lineární statické úlohy

Systém lineárních rovnic
pro neznámé DP $\{\Delta_G\}$

$$[K]\{\Delta_G\} = \{F\}$$

[K] … matice tuhosti
{Δ} … vektor deformačních parametrů
{F} … vektor vnějšího zatížení

Typ úlohy:
lineární: z hlediska materiálu (**E**)
statická: zatížení a deformace neměnná v čase

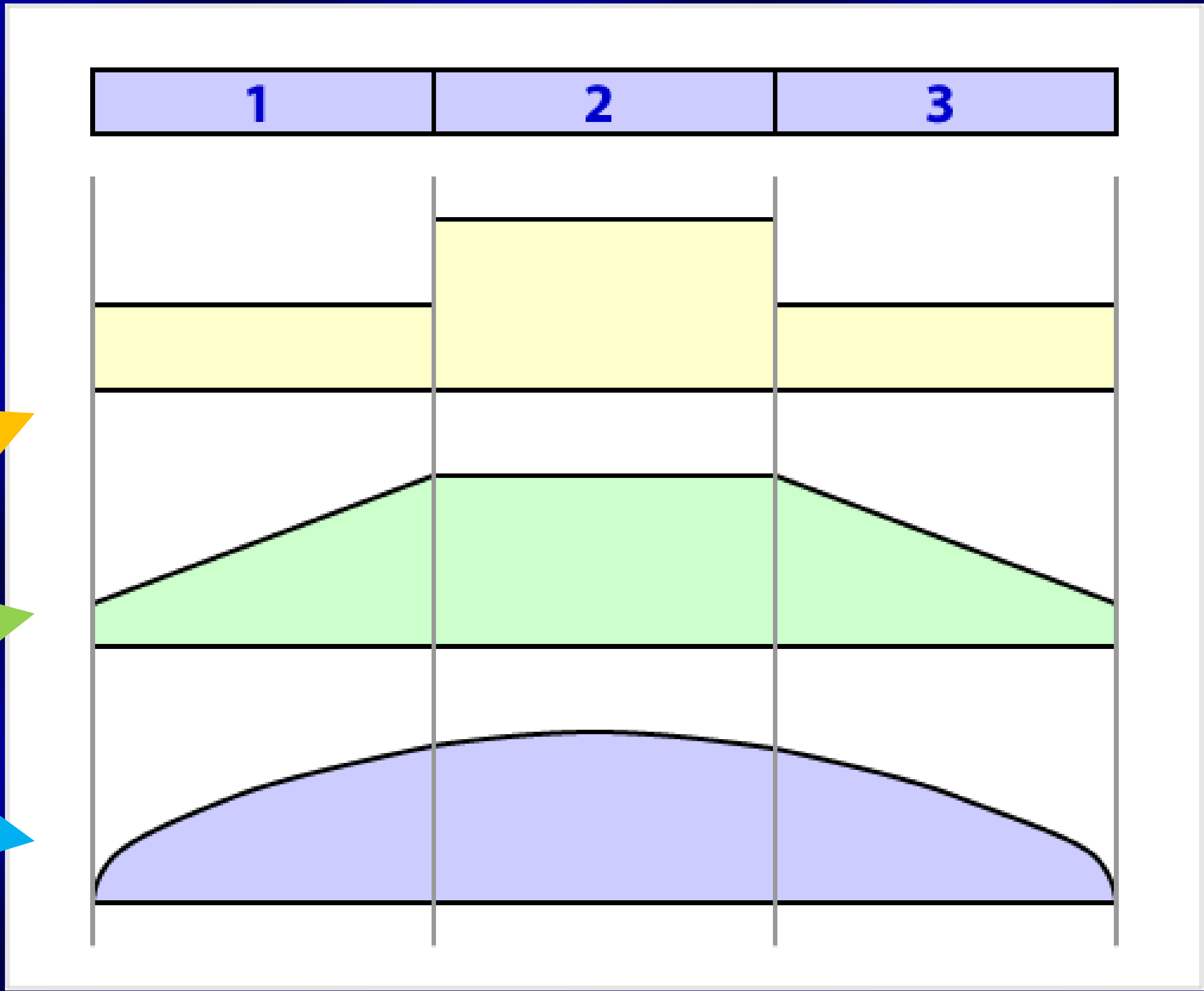
Přesnost metody MKP, vliv faktoru P

P: stupeň polynomu určujícího deformační křivku

a_0

a_0+a_1x

$a_0+a_1x+a_2x^2$



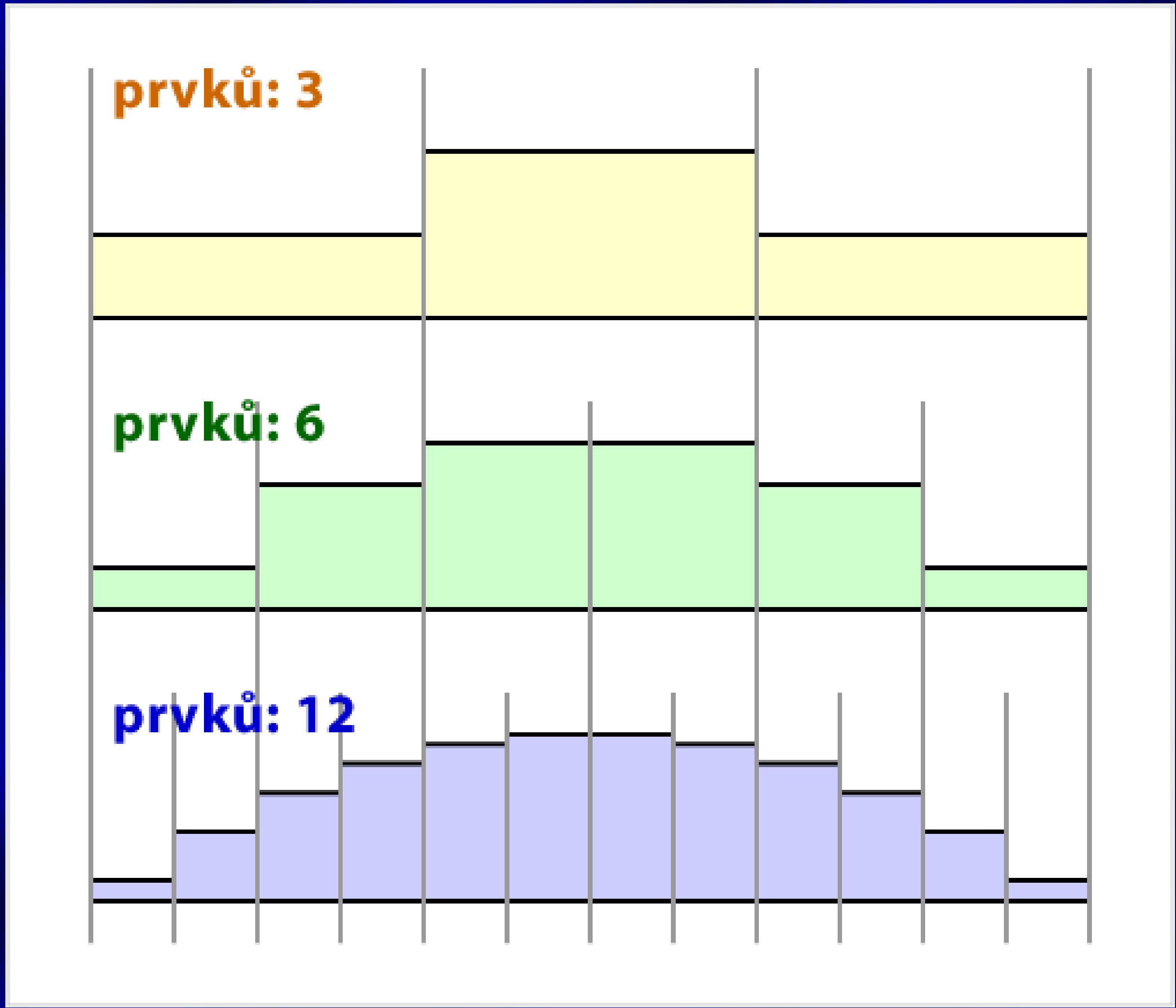
Přesnost metody MKP, vliv faktoru H

počet prvků

H: velikost prvků

Pro polynom:

$y=a_0$



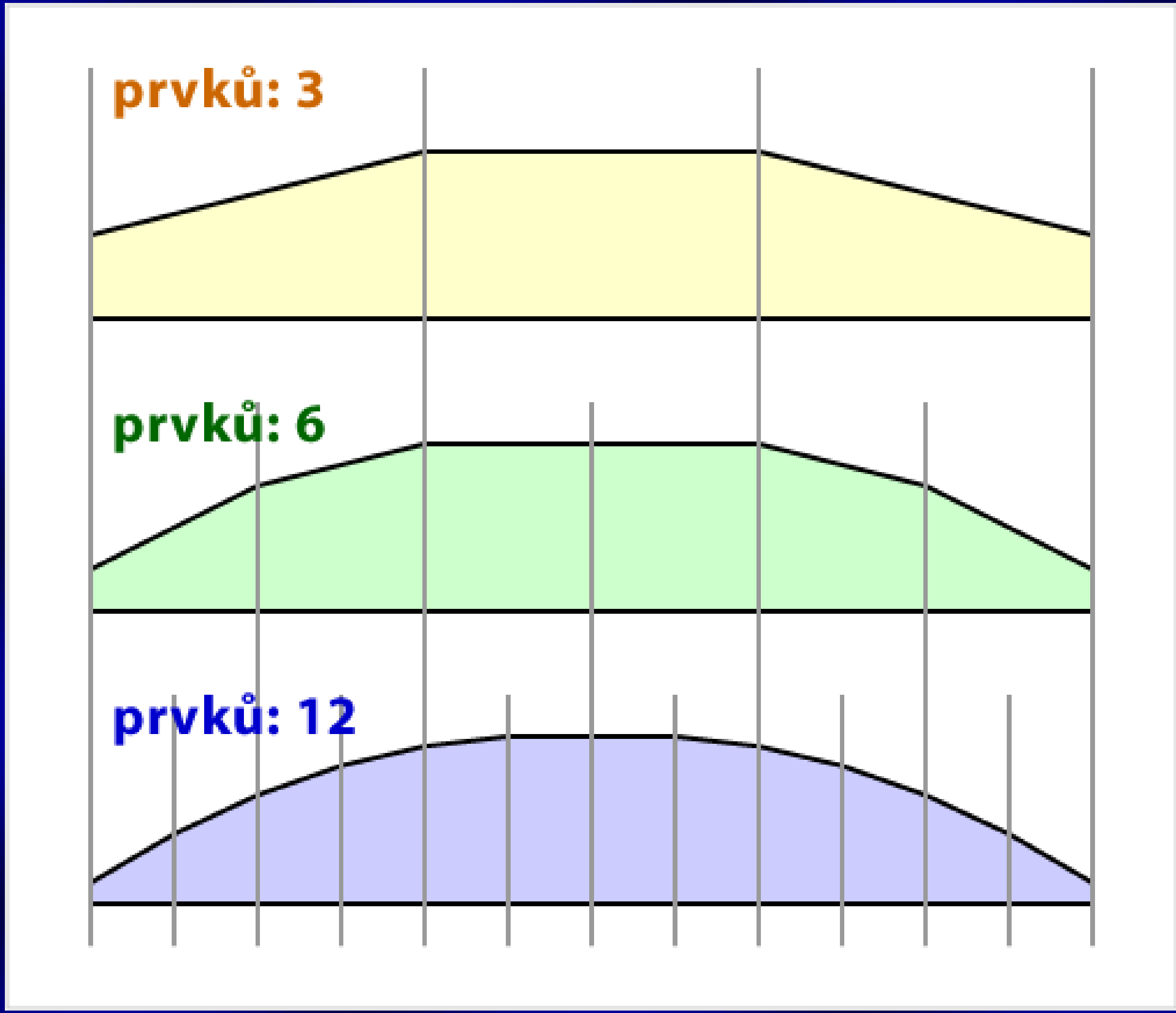
Přesnost metody MKP, vliv faktoru H

počet prvků

H: velikost prvků

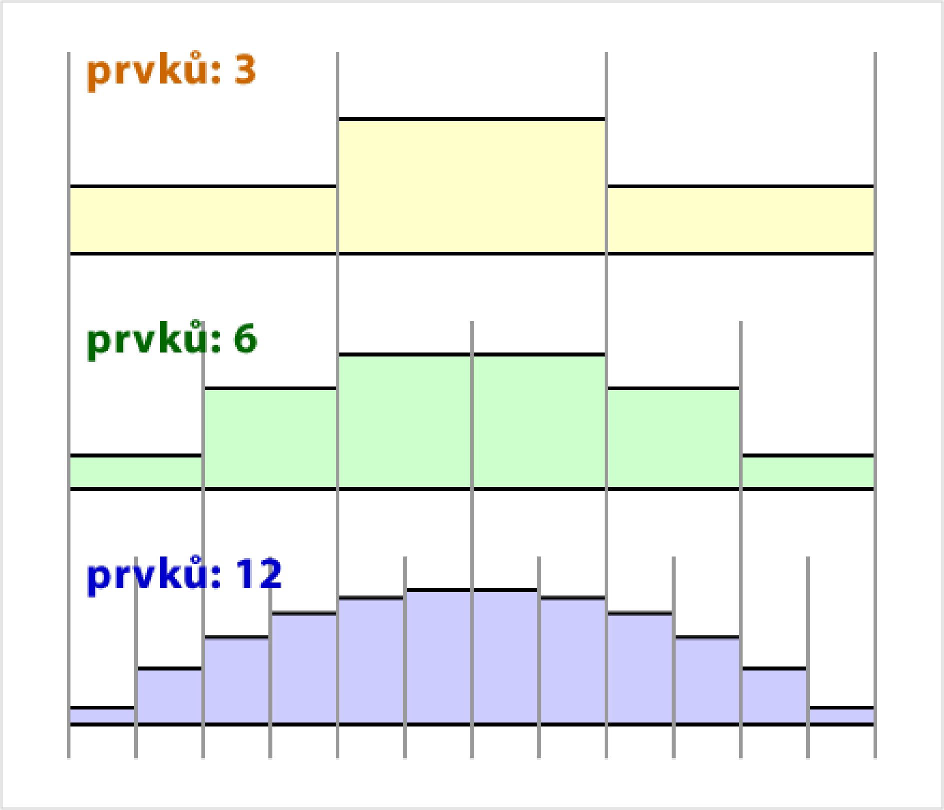
Pro polynom:

$y=a_0+a_1x$

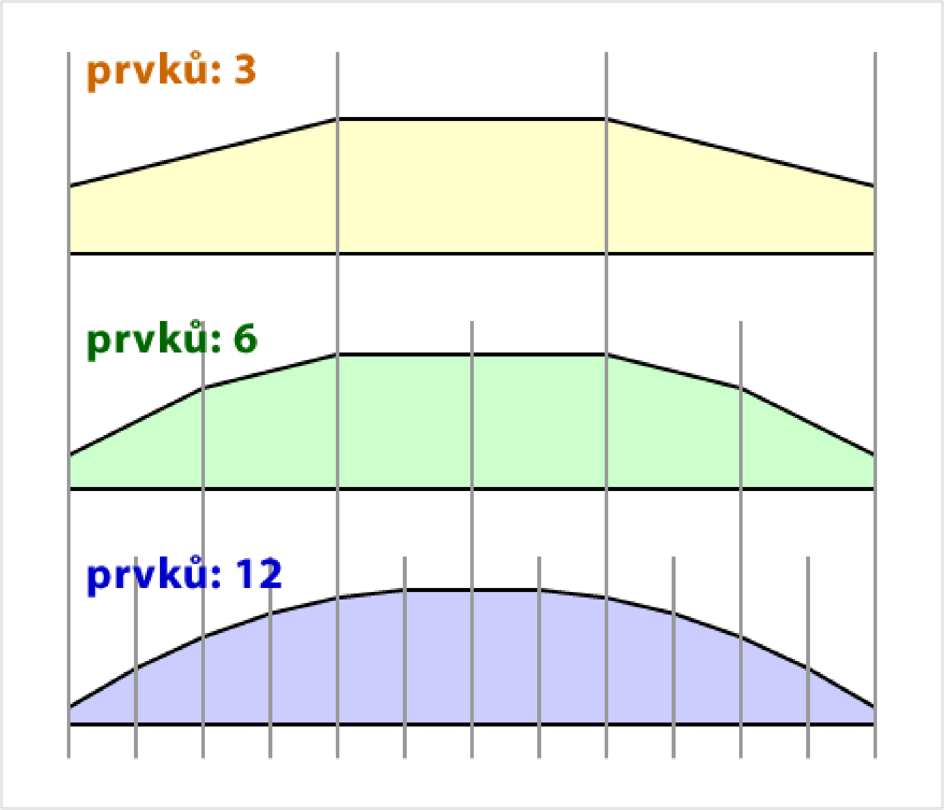


Přesnost metody MKP, srovnání vlivů faktorů HP

$y=a_0$



$y=a_0+a_1x$



Typy MKP analýz

Lineární analýzy

Nelineární analýzy (videa)

- nelinearity
  - * materiálu
  - * geometrie
    - ztráta stability
    - velká přetvořeni
  - * okrajové podmínky
    - kontakt
    - tření
- pružné-plastické chování

Příklady využití MKP analýz

dynamika

- vlastní frekvence s vlastními tvary kmitu
- odezvy
- harmonické odezvy
- analýzy náhodných vibrací a zemětřesení

proudění a přestup tepla

- vnitřní a vnější proudění nestlačitelného média
- přestup tepla vedením a prouděním
- ustálený stav

MKP rovnice pro dynamiku
bez vlivu tlumení

$$[M]\left\{\ddot{\Delta}\right\}+[K]\{\Delta\}=\left\{F_{(t)}\right\}$$

[M] … matice hmotnosti
{Δ̈} … vektor zrychlení deformačních parametrů
[K] … matice tuhosti
{Δ} … vektor deformačních parametrů
{F(t)} … zatížení proměnlivé v čase

MKP rovnice pro modální analýzu

vlastní frekvence a související vlastní tvary

$$\left([K]-\Omega^2[M]\right)\{\Delta_0\}=\{0\}$$

[K] … matice tuhosti

Ω … kruhová frekvence vlastních netlum. kmitů

[M] … matice hmotnosti

$\{\Delta_0\}$ … vlastní tvar netlumeného kmitání

Konec

Praktické ukázky:

- zatížení jednoduchého vetknutého nosníku
- videa z řešených úloh